

## Tentamen Calculus II, 2012

Datum : 05-04-2012  
Tijd : 9.00 - 12.00

U dient al uw antwoorden duidelijk te motiveren.  
Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan.  
De detailnormering van het tentamen staat onderaan. Succes !

1. Bereken de oppervlakte van het gebied beschreven in poolcoördinaten door

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

(Aanwijzing:  $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ )

2. (a) Beschouw de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

Voor welke waarden van  $x$  convergeert de reeks absoluut en voor welke waarden voorwaardelijk (conditionally) ?

- (b) Bepaal de puntsgewijze limiet van de volgende rij van functies

$$f_n(x) = \frac{\tan^{-1} x}{n} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Is de convergentie uniform op  $\mathbb{R}$  ?

3. De functie  $f(x, y)$  is gedefinieerd door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 2xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) = c \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat de functie discontinu is in de oorsprong als  $c \neq 1$ .  
(b) Toon aan dat voor  $c = 1$  de functie continu is op de gehele  $\mathbb{R}^2$ .  
(c) Neem  $c = 1$ . Bereken  $f_x(0, 0)$ .  
(d) Neem  $c = 1$ . Bereken  $f_x(0, y)$  voor  $y \neq 0$ . Is  $f_x(x, y)$  continu in de oorsprong ?

4. Beschouw de integraal

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{(x+y)}(y-2x)^2 dy dx$$

en de substitutie  $u = x + y, v = y - 2x$ .

(a) Laat zien dat het integratiegebied in de nieuwe variabelen gegeven wordt door

$$\{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, -2u \leq v \leq u\}$$

(b) Bereken de integraal.

5. Bereken alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 6y' + 25y = 50x$$

6. Beschouw een convergente reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  met  $a_n > 0$ .

(a) Bewijs dat de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  met

$$b_n = \frac{2a_n^2}{1 + a_n}$$

ook convergeert.

(b) Bewijs dat de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  met

$$c_n = \frac{2 + a_n^2}{1 + a_n}$$

divergeert.

**Puntenverdeling** (totaal 100). Gratis 10.

1. 8.

2. a: 12, b: 8.

3. a: 5, b: 10, c: 5, d: 5.

4. a: 5, b: 10.

5. a: 10.

6. a: 6, b: 6.